# Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

RM

2022-2023

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On prends $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$, $p \in \mathbb{N}$.

## 1 Systèmes d'équations linéaires et pivot de Gauss

### 1.1 Définitions

***Définition 1 :*** On appelle système linéaire de $p$ équations à $n$ inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{array}\right. . \qquad (1)$$

où les $a_{ij}$ et les $b_{ij}$ appartiennent à $\mathbb{K}$. On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont les composantes $x_i$ satisfont toutes les équations. Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

***Remarque 2 :*** Le système (1) peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ avec $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.
Le système est dit homogène si $B = 0$.

***Exemple 3 :*** Le système $\left\{\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ -x + 2y = 7 \end{array}\right.$ peut être représenté avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ par $AX = B$.

***Définition 4 :*** Pour une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, on note $L_i$ sa ligne numéro $i$ et $C_j$ sa colonne numéro $j$.
On pose alors $d_i = \min\{j \in [\![1\,;n]\!] | a_{ij} \neq 0\}$ pour $i \in [\![1\,;p]\!]$ l'indice du premier élément non nul sur la ligne $i$. On dit que la matrice $A$ non nul est alors échelonnée en ligne si il existe $r \in [\![1\,;p]\!]$ tel que si $i \leq r$, $L_i \neq 0$ et si $i > r$, $L_i = 0$ et enfin $1 \leq d_1 < d_2 < ... < d_r \leq n$. Elle est échelonnée en colonne si $tA$ l'est en ligne.

***Exemple 5 :*** La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

### 1.2 Méthode du pivot de Gauss théorique

***Définition 6 :*** L'application $(P, A) \in GL_n(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \mapsto P.A = PA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ définit une action de $Gl_n(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$ ( action de translation à gauche ) et deux matrices sont dans la même orbites si et seulement si elles ont le même noyau.

***Remarque 7 :*** On peut définir de même la translation à droite avec $P.A = AP^{-1}$.

***Définition 8 :*** Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ avec $i \neq j$, on appelle matrice de transvection une matrice carré de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ et matrice de dilatation une matrice carré de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.

***Proposition 9 :*** • La multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne $i$ par $\lambda$.
• La multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne $L_i$ par $L_i + \lambda L_j$.
• La multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne $j$ par $\lambda$.
• La multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne $C_j$ par $C_j + \lambda C_i$.
Ces opérations sont appelés opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

***Théorème 10 :*** Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de permutation et de transvection telle que la matrice $PA$ soit échelonnée en lignes. Cette matrice $PA$ est donc dans l'orbite de $A$ pour l'action par translation à gauche.

***Théorème 11 :*** Une opération sur un système élémentaire sur les lignes d'un système linéaire $AX = b$ le transforme en un système équivalent.

***Remarque 12 :*** On vient ici de trouver théoriquement l'existence de la matrice échelonné. La méthode consistant à l'obtenir par les opérations élémentaires est le pivot de Gauss. Il est donc similaire d'échelonner un système linéaire ou la matrice $A$ de celui-ci.
L'idée est donc que pour résoudre $AX = B$, on met $A$ sous forme échelonné et on remonte ensuite pour avoir les solutions.

### 1.3 Méthode du pivot de Gauss dans la pratique

***Proposition 13 :*** L'ensemble des solutions d'un systèmes linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les opérations élémentaires suivantes :

- Changer l'ordre des équations.
- multiplier une équation par un scalaire non nul.
- ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations.

***Proposition 14 :*** Pour échelonner une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, on procède de la façon suivante : On permute d'abords les lignes $L_i$ de sorte que $d_1 \leq d_i \leq d_j$ pour tout $i, j \in [\![1\,;p]\!]$ avec $i < j$. Ensuite, si on a $d_s = d_j$ pour $s \in [\![1\,;p-1]\!]$ et $j[\![s+1\,;p]\!]$, on effectue $L_j = L_j - \frac{a_{j,d_j}}{a_{s,d_s}} L_s$.
On fait parcourir $s$ de 1 à $p-1$ et on obtient que la matrice $A$ est échelonnée.

***Exemple 15 :*** Prenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 11 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 11 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

***Proposition ( Méthode pratique du pivot de Gauss ) 16 :*** Considérons un système linéaire de la forme (1) :

*i*) On change d'abords si besoin l'ordre des équations pour rendre le système le plus "échelonnée" possible.

*ii*) On échelonne ensuite le système avec la même méthode que pour la matrice. Il y a alors 2 cas : si on a $0x_1 + ... + 0x_n = b$ et $b \neq 0$, alors il n y a pas de solutions et si on a $0x_1 + ... + 0x_n = 0$, alors on retire simplement cette ligne.
Il y alors soit 1 ou plusieurs variables dans la dernière ligne.

*iii*) On pose ensuite des paramètres si plusieurs variables dans des lignes et on remonte le système pour avoir la solution.

***Exemple 17 :*** On considère le système $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{cases}$. Alors par opérations élémentaires :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ z - 2w = 1 \\ 2z - 4w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ z - 2w = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a donc que $x$ et $z$ sont les inconnues principales et on pose $y = \lambda$ et $w = \mu$ en paramètre. On a donc comme solutions du système $x = 4 - 2\lambda + \mu, y = \lambda, z = 1 + 2\mu, w = \mu$.

***Proposition 18 :*** En implémentant l'algorithme du pivot de Gauss sur ordinateur, on obtient que son temps de calcul est $O(n^3)$ ou $n$ est la taille de la matrice.

## 2 Méthode directe pour résoudre $AX + B$

### 2.1 Système de Cramer et pivot de Gauss

***Proposition/Remarque 19 :*** Une première méthode est évidemment celle que l'on a détaillé précédemment qui est le pivot de Gauss.

***Définition 20 :*** On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice $A$ est carrée et inversible.

***Remarque 21 :*** On a alors que $X = A^{-1}B$ est solution du système. C'est d'ailleurs la seule, donc un système de cramer possède une unique solution à priori.

***Théorème 22 :*** Un système de Cramer $AX = B$ admet toujours une et une seule solution, quel que soit le vecteur $B$. On a alors $x_i = \frac{\det(C_1|...|C_{i-1}|B|C_{i+1}|...|C_n)}{\det(A)}$.

***Exemple 23 :*** Soit le système $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$. On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -46$. Les formules de Cramer donne donc $x = 5, y = 1, z = 1$.

***Remarque 24 :*** Attention! La méthode de Cramer est très mauvaise à implémenté sur ordinateur, car elle est de l'ordre de $O(n(n+1)!)$. Il vaut donc mieux quand même utilisé le pivot de Gauss pour résoudre numériquement le problème.

***Théorème 25 :*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution $X$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Dev 1**

### 2.2 Méthode par factorisation de matrices

***Théorème ( factorisation LU ) 26 :*** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n$ telle que les $n$ sous-matrices diagonales $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $1 \leq k \leq n$ soient

inversibles.
Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})$ avec $l_{ii} = 1, 1 \leq i \leq n$, et une matrice triangulaire supérieure $U$ telle que $A = LU$. De plus, une telle factorisation est unique.

***Application 27 :*** La factorisation LU est intéressante si on doit résoudre plusieurs systèmes linéaires de matrices $A$. Une fois $A = LU$ trouvée, on résout $AX = B$ avec $LW = B$ et $UV = W$ qui sont assez faciles car $L$ et $U$ sont triangulaires.

***Théorème ( factorisation de Cholesky ) 28 :*** Si $A$ est une matrice symétrique définie positive, il existe ( au moins ) une matrice réelle triangulaire inférieure $B$ telle que $A = B^tB$. De plus, on peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice $B$ soient tous $> 0$, et la factorisation $A = B^tB$ correspondante est alors unique.

***Application 29 :*** Pour résoudre un système linéaire $AX = b$ dont $A$ est symétrique définie positive, consiste à calculer la factorisation $A = B^tB$ de Cholesky puis de résoudre $BW = b$ et ${}^tBU = W$. Elle est meilleur dans ce cas que le pivot de Gauss.

***Théorème ( factorisation QR ) 30 :*** Etant donné une matrice $A$ d'ordre $n$, il existe une matrice unitaire $Q$ et une matrice triangulaire supérieure $R$ telles que $A = QR$. De plus, on peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de la matrice $R$ soient tous $\geq 0$. Si la matrice $A$ est inversible, la factorisation $A = QR$ correspondante est alors unique.

***Application 31 :*** En connaissant la factorisation QR de $A$, on a alors que $AX = B$ est équivalent à $RX = {}^tQB$ avec $R$ triangulaire, ce qui est donc plus facile.

***Remarque 32 :*** Les trois décompositions $LU$, $QR$ et de Cholesky sont en $O(n^3)$.

***Développement 33 :*** Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que ses valeurs propres sont de modules distincts classé de sorte que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n| > 0$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $P^{-1}$ possède une factorisation $LU$. Alors la suite $(A_k)_{k\geq 1}$ construite de la manière suivante

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_kQ_k \text{ où } A_k = Q_kR_k \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A_k \end{cases}.$$

est telle que

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i, \quad 1 \leq \lambda_i \leq n$$

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,j} = 0, \quad 1 \leq j < i \leq n$$

**Dev 2**

# 3 Méthode itérative pour résoudre $AX = B$

On cherches ici des méthodes itératives pour résoudre $Au = b$, où $A$ est inversible et $b$ un vecteur.

***Définition ( Méthode itérative ) 34 :*** Supposons qu'on puisse trouvé une matrice $B$ et un vecteur $c$ tels que $I - B$ soit inversible, et que les solutions de $u = Bu + c$ soit également solutions du problème de départ. On se donne alors $u_0$ un vecteur initial, et on pose $(u_k)_{k\geq 0}$ tel que

$$u_{k+1} = Bu_k + c$$

On dit alors que la méthode itérative est convergente si $(u_k)$ converge pour tout $u_0$ vers $u$, qui est solution de $Au = b$. La matrice $B$ est appelée matrice de la méthode itérative.

***Proposition 35 :*** Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) la méthode itérative est convergente.
2) $\rho(B) < 1$.
3) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\|.\|$.

***Application 36 :*** Supposons que l'on peut décomposer $A$ sous la forme $A = M - N$ où $M$ est une matrice inversible et "facile à inverser" de tels sorte qu'il est facile de résoudre $Mu = b$ ( diagonale ou triangulaire ). Alors

$$Au = b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b.$$

Avec $B = M^{-1}N = I - M^{-1}A$, on a alors que $I - B = M^{-1}A$ est inversible et en utilisant la méthode itérative avec donc $u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$, cela revient à résoudre les systèmes linéaires successifs :

$$Mu_{k+1} = Nu_k + b, k \geq 0$$

***Remarque 37 :*** Cette méthode est la composantes principale des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et méthode itérative de relaxation, 3 variantes pour résoudre le problème de départ $Au = b$.

***Remarque 38 :*** Les trois méthodes ont une complexité en $O(n^2)$.

***Proposition 39 :*** En décomposant la matrice $A$ de la forme $A = D - E - F$ ( voir ciarlet, trop relou de faire la matrice ) on peut résumer les méthodes dans le tableau suivant

| Nom de la Méthode | Décomposition A=M-N | Matrice $M^{-1}N$ de la méthode itérative | Description d'une itération |
|---|---|---|---|
| Jacobi | $A = D - (E+F)$ | $J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$ | $Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$ |
| Gauss-Seidel | $A = (D-E) - F$ | $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$ | $(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$ |
| Relaxation | $A = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right), \omega \neq 0$ | $\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$ | $\left(\frac{D}{\omega} - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$ |

**Références :**


1. Algèbre et géométrie Rombaldi

2. Algèbre linéaire Grifonne

3. Analyse numérique matricielle Ciarlet

4. isenmann (rip)